Elementare Methoden der Numerischen Mathematik
Dr. Dieter Kaiser

Lösung Aufgabe 5
Stellen Sie die Dezimalzahl 1.9 unter Verwendung des unsymmetrischen Rundens (Abbrechen) durch die zugehörige Maschinenzahl aus $R(\beta,t,L,U)$ dar, mit $\beta=2$ , $t=6$ $L=20$ und $U=20$ . Bestimmen Sie den relativen Fehler und vergleichen Sie ihn mit der theoretischen Abschätzung (relative Maschinengenauigkeit für unsymmetrisches Rechnen).

Bemerkung: Zur Lösung dieser Aufgabe gibt es (Lit. Vorl.) verschiedene Varianten. Ich stellen Ihnen hier meine vor. Sie hat den Vorteil, dass man z.B. den absoluten Fehler gleich mitgeliefert bekommt.

1. Man sucht sich zunächst die 2er-Potenz k, die direkt unter der Zahl liegt, in dem Fall also $2^0=1<1.9\ (2^2=2>1.9)$ und k=0
2. Dann macht man sich eine Tabelle, in der man die notwendigen Größen einträgt und einige Nebenrechnungen extra macht. Vorher merkt man sich das Vorzeichen und rechnet mit $x=|x|$ .
   Also für x=1.9:

   | x-Rest | $2^k$ | bit | k | t |
   |---|---|---|---|---|
   | 1.9 | 1 | 1 | 0 | 1 |
   | 0.9 | 0.5 | 1 | -1 | 2 |
   | 0.4 | 0.25 | 1 | -2 | 3 |
   | 0.15 | 0.125 | 1 | -3 | 4 |
   | 0.025 | 0.0625 | 0 | -4 | 5 |
   | 0.025 | 0.03125 | 0 | -5 | 6 |
   | 0.025 | (0.015625 | 1 | -6 | 7) |

   Ich hoffe, dass jeder erkennt, was in der Tab. steht. Man beginnt mit x (hier x-Rest) selber. Wenn man unter 1. die richtige Zahl für k gefunden hat, muss auch die 2er-Potenz $2^k$ ‚passen' und das notwendige bit=1 sein (normierte Zahl!). In der nächsten Zeile wird nun die Differenz x-Rest=x-Rest_alt- $2^k$ eingetragen, die nächste 2er-Potenz getestet und das bit=1 gesetzt, wenn x-Rest > $2^k$ , sonst 0.
   Dies führt man nun fort, bis die gewünschte Anzahl der Stellen t erreicht ist. Ich habe in der Tabelle mal noch die nächste, nicht benötigte vollständige Zeile für t=7 eingetragen.
3. Nun muss man noch die normalisierte duale Zahl zusammensetzen.
   Man beginnt mit dem Vorzeichen (hier +) und 0. . Dann werden die in der Tabelle berechneten bits (hier 111100) eingetragen. Nun muss noch die richtige 2er-Potenz eingetragen werden. Da in der normierten Darstellung die Zahl hinter dem Komma/Punkt beginnt und damit die 1. Ziffer für $2^{-1}=\frac{1}{2}=0.5$ steht, muss ich also mit $2^{k+1}$ (k aus 1.) multiplizieren und die Zahl heißt dann:
   $x_M=+0.111100\bullet 2^{+1}=+0.111100z+1$ . Die zweite Darstellung habe ich analog zu der Computerschreibweise für Dezimalzahlen 1.9=1.9e0 ‚erfunden'.
4. Aus der Darstellung geht auch unmittelbar der absolute Fehler der Darstellung hervor. Er ist nämlich gleich dem letzten Wert in der Tabelle für x-Rest=0.025= $\delta_x$ aaaber nun für die nächste Zeile t=7. Diesen Wert muss man also noch ausrechnen. Damit ist der

relative Fehler $\varepsilon_x = \frac{\delta_x}{|x|} = \frac{0.025}{1.9} = 0.013157894736842$ . Aus der Vorlesung ist die relative Maschinengenauigkeit für unsymmetrisches Runden $\nu = \beta^{1-t} = 2^{1-6} = 2^{-5} = 0.03125 > \varepsilon_x$ .

Ich habe mal noch ein Bsp. angefügt für x=-2.756 und t=10:

| x-Rest | $2^k$ | bit | k | t |
|---|---|---|---|---|
| 2.756 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 0.756 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| 0.756 | 0.5 | 1 | -1 | 3 |
| 0.256 | 0.25 | 1 | -2 | 4 |
| 0.006 | 0.125 | 0 | -3 | 5 |
| 0.006 | 0.0625 | 0 | -4 | 6 |
| 0.006 | 0.03125 | 0 | -5 | 7 |
| 0.006 | 0.015625 | 0 | -6 | 8 |
| 0.006 | 0.0078125 | 0 | -7 | 9 |
| 0.006 | 0.00390625 | 1 | -8 | 10 |
| 0.00209375 | (0.001953125 | 1 | -9 | 11) |

Hier wäre jetzt die Darstellung

$x_M = -0.1011000001z2$

Und der absolute Fehler $\delta_x = 0.00209375$ .